LUẬT MẠNH SỐ LỚN DẠNG (p, q) CHO MẢNG KÉP CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN

Vũ Thị Ngọc Ánh
Khoa Toán, Trường Đại học Hoa Lư, Ninh Bình
Ngày nhận bài 26/12/2018, ngày nhận đăng 14/02/2019

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để mảng kép các phần tử ngẫu nhiên tuân theo luật mạnh số lớn dạng (p, q) ((p, q)-type SLLN) trong trường hợp $1 \le q < p < 2$.

1 Giới thiệu

Kí hiệu $\mathcal{B}$ là không gian Banach thực, khả li với chuẩn $\|\cdot\|$. Cho $\{V_n, n \ge 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên và $\{V_{mn}, m \ge 1, n \ge 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên $\mathcal{B}$. Kí hiệu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k,\, n \ge 1; \qquad S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} V_{kl},\, m \ge 1,\, n \ge 1.$$

V_n hội tụ đầy đủ theo trung bình cấp q ($q > 0$) đến 0 (kí hiệu $V_n \xrightarrow{c, L_q} 0$) nếu thỏa mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\|V_n\|^q < \infty.$$

V_{mn} hội tụ đầy đủ theo trung bình cấp q ($q > 0$) đến 0 (kí hiệu $V_{mn} \xrightarrow{c, L_q} 0$) nếu thỏa mãn

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E\|V_{mn}\|^q < \infty.$$

Luật mạnh số lớn dạng $(p,\ q)$ trong trường hợp $p = q = 1$ của dãy các phần tử ngẫu nhiên đã được nghiên cứu vào năm 2011 bởi Li, Qi, Rosalsky [4]. Năm 2015, Li, Qi, Rosalsky [5] đã xây dựng điều kiện để $S_n/n^{1/q+1/p}$ hội tụ đầy đủ theo trung bình cấp q đến 0 thông qua luật mạnh số lớn dạng (p, q) và chứng minh luật mạnh số lớn dạng (p, q) của dãy các phần tử ngẫu nhiên kéo theo luật mạnh số lớn, trong đó $0 < p < 2$ và $q > 0$. Điều kiện cần và đủ để dãy các phần tử ngẫu nhiên tuân theo luật mạnh số lớn dạng (p, q) trong một số trường hợp của (p, q) được nghiên cứu vào năm 2016 bởi Li, Qi, Rosalsky [6].

[1)] Email: vtnanh@hluv.edu.vn

Năm 2016, Anh, Thanh, Thuy [1] đã đưa ra khái niệm luật mạnh số lớn dạng (p, q) cho mảng kép các phần tử ngẫu nhiên và chứng minh được luật mạnh số lớn dạng (p, q) kéo theo luật mạnh số lớn của mảng kép các phần tử ngẫu nhiên, trong đó $0 < p < 2$ và $q > 0$. Năm 2017, Anh, Thuy [2] đã xây dựng điều kiện để $S_{mn}/(mn)^{1/q+1/p}$ hội tụ đầy đủ theo trung bình cấp q đến 0 thông qua luật mạnh số lớn dạng (p, q).

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng điều kiện cần và đủ để mảng kép các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian ổn định loại p tuân theo luật mạnh số lớn dạng (p, q) trong trường hợp $1 \le q < p < 2$.

Định nghĩa 1.1. [1] Cho $0 < p < 2$ và $q > 0$. Giả sử $\{V_{mn},\, m \ge 1, n \ge 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với phần tử ngẫu nhiên V nhận giá trị trên $\mathcal{B}$. Ta nói $\{V_{mn},\, m \ge 1, n \ge 1\}$ *tuân theo luật mạnh số lớn dạng* (p, q) nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn}\left(\frac{\|S_{mn}\|}{(mn)^{1/p}}\right)^{q} < \infty \text{ h.c.c.} \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.2. [4; pp. 1133] Cho $0 < p \le 2$ và $\{\Theta_n,\, n \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên ổn định, độc lập, có cùng hàm đặc trưng

$$\psi(t) = \exp\{-|t|^p\},\ t \in \mathbb{R}.$$

Không gian $\mathcal{B}$ được gọi là *không gian ổn định loại p* nếu $\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n\nu_n$ hội tụ hầu chắc chắn, trong đó $\{\nu_n,\, n \ge 1\}$ là dãy các phần tử trong $\mathcal{B}$ thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty}\|\nu_n\|^p < \infty$.

Tính chất của không gian ổn định loại p, mối liên hệ giữa không gian ổn định loại p và không gian Rademacher loại p có thể tìm thấy trong [4; pp. 1134].

2 Kết quả chính

Giả sử $\{V_{mn},\, m \ge 1, n \ge 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với phần tử ngẫu nhiên V nhận giá trị trên $\mathcal{B}$.

Đặt $u_0 = 0$. Với $m \ge 1$, $n \ge 1$, kí hiệu

$$u_n = \inf\left\{t : P(\|V\| \le t) > 1 - \frac{1}{n}\right\} = \inf\left\{t : P(\|V\| > t) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Với $q > 0$, ta có

$$\inf\left\{t : P(\|V\|^q \le t) > 1 - \frac{1}{n}\right\} = \inf\left\{t : P(\|V\|^q > t) < \frac{1}{n}\right\} = u_n^q.$$

Chú ý: u_n^q là phân vị cấp $(1 - \dfrac{1}{n})$ của $\|V\|^q$.

Định lý 2.1. Cho $1 \le q < p < 2$ và $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p. Khi đó $\{V_{mn},\, m \ge 1, n \ge 1\}$ tuân theo luật mạnh số lớn dạng (p, q) khi và chỉ khi $EV = 0$ và

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1)\int_{u_{n-1}^q}^{u_n^q} P^{q/p}\big(\|V\|^q > t\big)\,dt < \infty. \tag{2.1}$$

Để chứng minh Định lý 2.1 ta cần sử dụng 4 bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.2. Giả sử $1 \le q < p < 2$. Khi đó điều kiện (1.1) thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn}E\left(\frac{\|S_{mn}\|}{(mn)^{1/p}}\right)^q < \infty. \tag{2.2}$$

Chứng minh. Trong chứng minh Định lý 3.2 của Anh, Thanh, Thuy [1] đã chỉ ra rằng (1.1) kéo theo $E\|V\|^p \ln(\|V\|+1) < \infty$. Từ Định lý 2.1 của Anh, Thuy [2] trường hợp $q < p$ ta suy ra điều kiện (2.2) thỏa mãn khi và chỉ khi điều kiện (1.1) thỏa mãn và $E\|V\|^p \ln(\|V\|+1) < \infty$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Với $m \ge 1, n \ge 1$, ta kí hiệu $U_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} V_{kl} I(\|V_{kl}\| \le u_{mn})$, trong đó

$$u_{mn} = \inf\left\{t : P(\|V\| \le t) > 1 - \frac{1}{mn}\right\} = \inf\left\{t : P(\|V\| > t) < \frac{1}{mn}\right\}.$$

Với k là số số nguyên dương, ta kí hiệu d_k là số ước nguyên dương của k.
Kí hiệu C là hằng số dương nhưng có thể khác nhau ở mỗi lần xuất hiện.

Bổ đề 2.3. Cho $1 \le q < p < 2$ và $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p. Nếu điều kiện (2.1) thỏa mãn, thì

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\|U_{mn} - EU_{mn}\|^q}{(mn)^{1+q/p}} < \infty. \tag{2.3}$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p nên tồn tại $p < r < 2$ sao cho $\mathcal{B}$ cũng là không gian ổn định loại r [4; pp. 1134]. Áp dụng Bổ đề 3.1 trong [6] ta suy ra tồn tại hằng số $0 < c(r,q) < \infty$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
E\|U_{mn} - EU_{mn}\|^q &\le c(r,q)\left(\sup_{t>0} t^{r/q}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} P\big(\|V_{kl}\|^q I(\|V_{kl}\| \le u_{mn}) > t\big)\right)^{q/r}\\
&\le c(r,q)\left(mn \sup_{0\le t\le u_{mn}^q} t^{r/q} P(\|V\|^q > t)\right)^{q/r}\\
&\le c(r,q)(mn)^{q/r}\left(\sup_{0\le t\le u_{mn}^q}\left(\int_0^t P^{q/r}(\|V\|^q > t)dx\right)^{r/q}\right)^{q/r}\\
&\le c(r,q)(mn)^{q/r}\left(\sup_{0\le t\le u_{mn}^q}\left(\int_0^t P^{q/r}(\|V\|^q > x)dx\right)^{r/q}\right)^{q/r}\\
&\le c(r,q)(mn)^{q/r}\int_0^{u_{mn}^q} P^{q/r}(\|V\|^q > x)dx,\ m \ge 1, n \ge 1.
\end{aligned}$$

Với $n \geq 1$, ta có $P(\|V\|^q > t) \geq \dfrac{1}{n}$ với mọi $t < u_n^q$, nên

$$P^{q/r-q/p}(\|V\|^q > t) \leq \frac{1}{n^{q/r-q/p}} \text{ với mọi } t < u_n^q.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\|U_{mn}-EU_{mn}\|^q}{(mn)^{1+q/p}} &\leq c(r,q)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1+q/p-q/r}}\int_0^{u_{mn}^q} P^{q/r}(\|V\|^q > t)dt \\
&= c(r,q)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p-q/r}}\int_0^{u_k^q} P^{q/r}(\|V\|^q > t)dt \\
&= c(r,q)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p-q/r}}\sum_{n=1}^{k}\int_{u_{n-1}^q}^{u_n^q} P^{q/r}(\|V\|^q > t)dt \\
&= c(r,q)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p-q/r}}\int_{u_{n-1}^q}^{u_n^q} P^{q/r}(\|V\|^q > t)dt \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^{q/p-q/r}}\int_{u_{n-1}^q}^{u_n^q} P^{q/r}(\|V\|^q > t)dt \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1)\int_{u_{n-1}^q}^{u_n^q} P^{q/p}(\|V\|^q > t)dt \\
&< \infty \qquad\qquad \text{(do (2.1))}.
\end{aligned}$$

$\square$

Bổ đề 2.4. Cho $1 \leq q < p < 2$ và $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p. Nếu điều kiện (2.1) thỏa mãn, thì

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\,\|(S_{mn}-U_{mn}) - E\,(S_{mn}-U_{mn})\|^q}{(mn)^{1+q/p}} < \infty. \tag{2.4}$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p và $1 \leq q < p < 2$ nên $\mathcal{B}$ là không gian Rademacher loại q [4; pp.1134]. Do đó từ Định lý 2.1 trong [7] ta có

$$\begin{aligned}
E\,\|(S_{mn}-U_{mn}) - E\,(S_{mn}-U_{mn})\|^q &= E\left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\big(V_{kl}I(\|V_{kl}\| > u_{mn}) - EV_{kl}I(\|V_{kl}\| > u_{mn})\big)\right\|^q \\
&\leq CmnE\,\|V\|^q\,I(\|V\| > u_{mn}),\ m \geq 1, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left\|(S_{mn}-U_{mn})-E\left(S_{mn}-U_{mn}\right)\right\|^{q}}{(mn)^{1+q/p}}\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left\|V\right\|^{q}I(\|V\|>u_{mn})}{(mn)^{q/p}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}E\left\|V\right\|^{q}I(\|V\|>u_k)$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}\int_{0}^{u_k^q}P(\|V\|^q>u_k^q)\,dt+C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}\int_{u_k^q}^{\infty}P(\|V\|^q>t)\,dt$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p}}u_k^q+C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}\int_{u_k^q}^{\infty}P(\|V\|^q>t)\,dt. \qquad (2.5)$$

Với $l\geq 1$, ta có $\dfrac{1}{l}\leq P(\|V\|^q>t)$ với mọi $t<u_l^q$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p}}u_k^q=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p}}\sum_{l=1}^{k}(u_l^q-u_{l-1}^q)=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=l}^{\infty}\frac{d_k}{k^{1+q/p}}\right)(u_l^q-u_{l-1}^q)$$

$$\leq C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ln(l+1)}{l^{q/p}}(u_l^q-u_{l-1}^q)\leq C\sum_{l=1}^{\infty}\ln(l+1)\int_{u_{l-1}^q}^{u_l^q}P^{q/p}(\|V\|^q>t)\,dt$$

$$<\infty \qquad \text{(do (2.1))}. \qquad (2.6)$$

Với $l\geq 1$, ta có $P(\|V\|^q>t)\leq\dfrac{1}{l}$ với mọi $t\geq u_l^q$, nên

$$P^{1-q/p}(\|V\|^q>t)\leq\frac{1}{l^{1-q/p}} \text{ với mọi } t\geq u_l^q.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}\int_{u_k^q}^{\infty}P(\|V\|^q>t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^{q/p}}\sum_{l=k}^{\infty}\int_{u_l^q}^{u_{l+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{d_k}{k^{q/p}}\right)\int_{u_l^q}^{u_{l+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt\leq C\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ln(l+1)}{l^{q/p-1}}\int_{u_l^q}^{u_{l+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt$$

$$\leq C\sum_{l=1}^{\infty}\ln(l+1)\int_{u_l^q}^{u_{l+1}^q}P^{q/p}(\|V\|^q>t)\,dt<\infty \qquad \text{(do (2.1))}. \qquad (2.7)$$

Từ (2.5), (2.6) và (2.7) ta suy ra (2.4). □

Bổ đề 2.5. Giả sử $1 \le q < p < 2$. Nếu điều kiện (2.2) thỏa mãn, thì điều kiện (2.1) thỏa mãn.

Chứng minh. Giả $\{V', V'_{mn},\ m \ge 1, n \ge 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên độc lập copy của $\{V, V_{mn},\ m \ge 1, n \ge 1\}$. Đặt

$$\widehat{V} = V - V'; \quad \widehat{V}_{mn} = V_{mn} - V'_{mn}, \quad \widehat{S}_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \widehat{V}_{kl},\ m \ge 1, n \ge 1.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Lévy ta suy ra, với mọi $m \ge 1, n \ge 1$ và mọi $t \ge 0$ ta có

$$P\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\|^q > t\right) = P\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\| > t^{1/q}\right) \le 2P(\|\widehat{S}_{mn}\| > t^{1/q}) = 2P(\|\widehat{S}_{mn}\|^q > t).$$

Suy ra, với mọi $m \ge 1, n \ge 1$ ta có

$$E\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\|^q\right) \le 2E\|\widehat{S}_{mn}\|^q. \tag{2.8}$$

Từ (2.2) ta suy ra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} E\left(\frac{\|\widehat{S}_{mn}\|}{(mn)^{1/p}}\right)^q < \infty.$$

Kết hợp với (2.8) ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^{1+q/p}} E\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\|^q\right) < \infty. \tag{2.9}$$

Với $m \ge 1, n \ge 1$, ta có

$$\begin{aligned} E\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\|^q\right) &= \int_0^{\infty} P\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} \|\widehat{V}_{kl}\|^q > t\right) dt = \int_0^{\infty} \Big(1 - P^{mn}(\|\widehat{V}\|^q \le t)\Big)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \Big(1 - \big(1 - P(\|\widehat{V}\|^q > t)\big)^{mn}\Big)\, dt \ge \int_0^{\infty} \Big(1 - \exp\big(-mnP(\|\widehat{V}\|^q > t)\big)\Big)\, dt. \end{aligned}$$

Giả sử $m(\|V\|)$ là median của $\|V\|$. Áp dụng Bất đẳng thức đối xứng yếu ta có

$$P\left(\big|\|V\| - m(\|V\|)\big| > t\right) \le 2P\left(\big|\|V\| - \|V'\|\big| > t\right) \le 2P(\|\widehat{V}\| > t) \text{ với mọi } t > 0.$$

Do đó

$$P\big(\|V\| > t + m(\|V\|)\big) \le 2P(\|\widehat{V}\| > t) \text{ với mọi } t > 0.$$

Suy ra

$$E\left(\max_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}}\|\widehat{V}_{kl}\|^q\right)\ge C\int_0^\infty\Big(1-\exp\big(-\frac{mn}{2}P(\|V\|^q>t)\big)\Big)\,dt. \tag{2.10}$$

Đặt

$$T=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(mn)^{1+q/p}}\int_0^\infty\Big(1-\exp\big(-\frac{mn}{2}P(\|V\|^q>t)\big)\Big)\,dt.$$

Từ (2.9) và (2.10) suy ra $T<\infty$.
Với $k\ge 1$, ta có $P(\|V\|^q>t)\le\dfrac{1}{k}$ với mọi $t>u_k^q$ nên

$$\frac{k}{2}P(\|V\|^q>t)\le\frac{1}{2} \text{ với mọi } t>u_k^q. \tag{2.11}$$

Đặt $h(x)=\begin{cases}1 & \text{nếu } x=0,\\ \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{nếu } x>0.\end{cases}$
Do $h(x)$ là hàm giảm và (2.11) suy ra, với $k\ge 1$ ta có

$$1-\exp\big(-\frac{k}{2}P(\|V\|^q>t)\ge CkP(\|V\|^q>t) \text{ với mọi } t>u_k^q.$$

Với $n\ge 1$, ta có $P(\|V\|^q>t)\ge\dfrac{1}{n+1}\ge\dfrac{1}{2n}$ với mọi $t<u_{n+1}^q$, nên

$$P^{1-q/p}(\|V\|^q>t)\ge C\frac{1}{n^{1-q/p}} \text{ với mọi } t<u_{n+1}^q.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
T&=\sum_{k=1}^\infty\frac{d_k}{k^{1+q/p}}\int_0^\infty\Big(1-\exp\big(-\frac{k}{2}P(\|V\|^q>t)\big)\Big)\,dt\\
&\ge\sum_{k=1}^\infty\frac{d_k}{k^{1+q/p}}\int_{u_k^q}^\infty\Big(1-\exp\big(-\frac{k}{2}P(\|V\|^q>t)\big)\Big)\,dt\\
&\ge C\sum_{k=1}^\infty\frac{d_k}{k^{q/p}}\int_{u_k^q}^\infty P(\|V\|^q>t)\,dt=C\sum_{k=1}^\infty\frac{d_k}{k^{q/p}}\sum_{n=k}^\infty\int_{u_n^q}^{u_{n+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt\\
&=C\sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{k=1}^n\frac{d_k}{k^{q/p}}\right)\int_{u_n^q}^{u_{n+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt\ge C\sum_{n=1}^\infty\frac{\ln(n+1)}{n^{q/p-1}}\int_{u_n^q}^{u_{n+1}^q}P(\|V\|^q>t)\,dt
\end{aligned}$$

$$\geq C \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) \int\limits_{u_n^q}^{u_{n+1}^q} P^{q/p}(\|V\|^q > t)\, dt.$$

Do đó ta thu được (2.1). □

Chứng minh Định lý 2.1:

* *Điều kiện cần.* Từ Định lý 3.2 của Anh, Thanh, Thuy [1] và Định lý 1.2 của Giang [3] ta suy ra $EV = 0$. Mặt khác, từ Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.5 ta suy ra (2.1).

* *Điều kiện đủ.* Do $EV = 0$ nên ta có

$$S_{mn} = \Big(U_{mn} - EU_{mn}\Big) + \Big(S_{mn} - U_{mn} - E\left(S_{mn} - U_{mn}\right)\Big),\ m \geq 1, n \geq 1.$$

Do đó, từ (2.3) và (2.4) ta suy ra (2.2). Từ (2.2) ta suy ra (2.1).

Từ Định lý 2.1 và Bổ đề 2.2 ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.6. Cho $1 \leq q < p < 2$ và $\mathcal{B}$ là không gian ổn định loại p. Khi đó

$$\frac{1}{(mn)^{1/q+1/p}} S_{mn} \xrightarrow{c, L_q} 0$$

khi và chỉ khi $EV = 0$ và điều kiên (2.1) thỏa mãn.

Lời cảm ơn: Tác giả bài viết xin gửi lời cảm ơn đến PGS. TS. Lê Văn Thành (Viện Sư phạm Tự nhiên - Trường Đại học Vinh) về những đóng góp rất hữu ích cho bài viết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] V. T. N. Anh, L. V. Thanh, N. T. Thuy, *On Generalizations of Maximal Inequalities for Double Arrays of Independent Random Elements in Banach Spaces*, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM) preprint.

[2] V. T. N. Anh, N. T. Thuy, *On the conditions for the complete convergence in mean for double sums of independent radom elements in Banach spaces*, Journal of Science - Vinh University, Vol. 46, 2A, 2017, pp. 31-42.

[3] N.V. Giang, *Marcinkiewicz-Zygmund laws for Banach space valued random variables with multidimensional parameters,* English translation in Theory Probab. Appl. **40** , 1995, pp. 175-181.

[4] D. Li, Y. Qi and A. Rosalsky, *A refinement of the Kolmogorov-Marcinkiewicz-Zygmund strong law of large numbers,* J. Theoret. Probab. **24**, 2011, No. 4, pp. 1130-1156.

[5] D. Li, Y. Qi and A. Rosalsky, *An extension of theorems of Hechner and Heinkel*, Asymptotic Laws and Methods in Stochastics: A Volume in Honour of Miklós Csörgo, Fields Institute Communications Series, Springer-Verlag, New York, 2015.

[6] D. Li, Y. Qi and A. Rosalsky, *A characterization of a new type of strong law of large numbers,* Trans. Amer. Math. Soc., **368**, No. 1, 2016, pp. 539-561.

[7] J. Hoffmann-Jørgensen and G. Pisier, *The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces*, Ann. Probability, **4** , No. 4, 1976, pp. 587-599.

SUMMARY

ON THE (p, q)-TYPE STRONG LAW OF LARGE NUMBER FOR DOUBLE ARRAYS OF RANDOM ELEMENTS

In this note, we provide the necessary and sufficient conditions for double arrays of random elements satisfying the (p, q)-type SLLN for the case $1 \leq q < p < 2$.